

Abitur 2013 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B2

Gegeben sind die Ebenenschar $E_t : (1+t) \cdot x + t \cdot y - 2z = 14$ mit $t \in \mathbb{R}$ und die Ebene

$$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } v, w \in \mathbb{R}.$$

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform.

Bestätigen Sie durch geeignete Rechnung, dass die Ebene F eine Ebene der Schar ist, und geben Sie den Wert von t an, für den $E_t = F$ ist.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebenen F und E_3 . Geben Sie die Menge der gemeinsamen Punkte an.

Teilaufgabe 2. (7 BE)

Ermitteln Sie zwei Ebenen der Ebenenschar E_t , die sich unter einem Winkel von 90° schneiden, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Die beiden Abbildungsmatrizen M und N bilden die Ebene F vom 3-dimensionalen Raum \mathbb{R}^3 in den 4-dimensionalen Raum \mathbb{R}^4 auf die „Ebenen“ F_M und F_N ab:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der „Ebenen“ F_M und F_N im \mathbb{R}^4 in Parameterform.

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Die beiden „Ebenen“ F_M und F_N können auf folgende Weise dargestellt werden:

$$F_M : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad F_N : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $r, s, t, u \in \mathbb{R}$

Die Untersuchung der Lagebeziehung der beiden neu entstandenen „Ebenen“ F_M und F_N im \mathbb{R}^4 führt auf ein lineares Gleichungssystem. Bestimmen Sie dieses lineare Gleichungssystem; es muss nicht gelöst werden.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist $r = -2$, $s = -2$, $t = -4$ und $u = -1$.

Ermitteln Sie damit die Lagebeziehung der beiden „Ebenen“ F_M und F_N .

Beurteilen Sie das Ergebnis.